О ПРОВЕРКЕ ГИПОТЕЗЫ ЧЕБЫШЁВА В ДИАПАЗОНЕ ПРОСТЫХ ЧИСЕЛ ДО 10^{15}

Щебетов Андрей Сергеевич
«Ломоносовская школа»/МИЭМ ВШЭ
Москва, Россия

Презентация на 30-м Соревновании молодых ученых Европейского Союза

EUCYS 2018

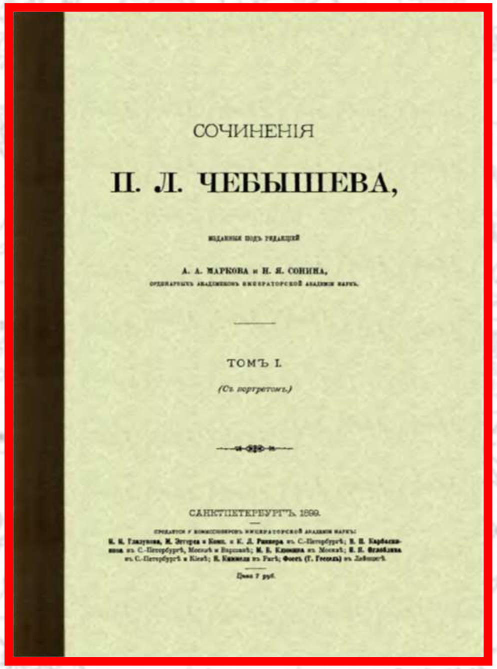
Дублин, Ирландия
14-18 сентября 2018 года

ЦЕЛИ И ЗАДАЧИ ПРОЕКТА

- ***Проверить гипотезу Чебышёва для 15 выбранных пар*** *делителей и остатков (15 «самых несправедливых гонок простых чисел»)*
- ***Расширить уже проверенный математиками диапазон в 1000 раз*** *до 10^{15} ($10*10^{14}$ – верхняя граница и последнее число проверяемого диапазона)*
- ***Точно определить основные характеристики всех зон****, как известных, так и новых, включая их начало, конец и количество членов*
- ***Проверить вновь открытые зоны на совпадение с предсказанными***
- ***Проверить и подтвердить существование уже найденных зон*** *изменения знака функции $\Delta_{q,a,b}(x)$*
- ***Сделать все первичные данные*** *о 15 исследованных «гонках простых чисел»* ***доступными широкому кругу математиков*** *через публикацию полных последовательностей в OEIS и в собственном репозитории на сайте автора*
- ***Представить все первичные данные в едином формате*** *и с единообразными определениями включенных значений.*

Задачей проекта являлась прямая и сплошная численная проверка гипотезы Чебышёва для простых чисел до 10^{15}.

ПИСЬМО ЧЕБЫШЁВА ФУССУ (1853)



СОЧИНЕНІЯ

П. Л. ЧЕБЫШЕВА,

изданныя подъ редакціей

А. А. МАРКОВА и Н. Я. СОНИНА,

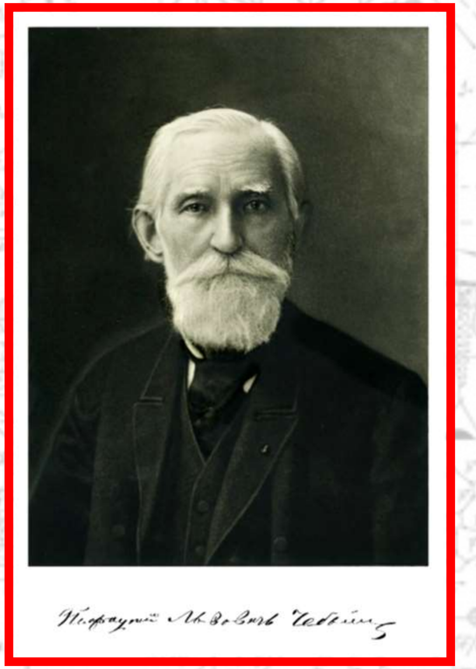
ординарныхъ академиковъ императорской академіи наукъ.

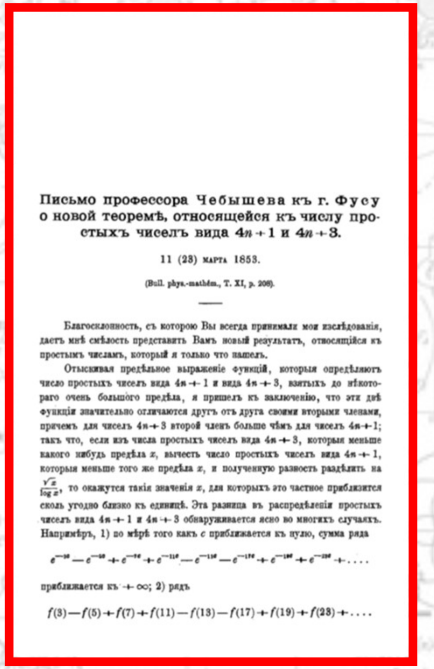
ТОМЪ I.

(Съ портретомъ.)

САНКТПЕТЕРБУРГЪ. 1899.

Цѣна 7 руб.





Письмо профессора Чебышева къ г. Фусу о новой теоремѣ, относящейся къ числу простыхъ чиселъ вида $4n+1$ и $4n+3$.

11 (23) марта 1853.

(Bull. phys.-mathém., T. XI, p. 208).

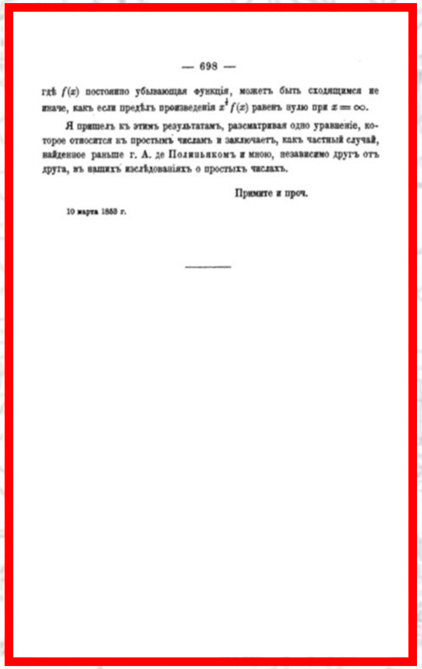
Благосклонность, съ которою Вы всегда принимали мои изслѣдованія, даетъ мнѣ смѣлость представить Вамъ новый результатъ, относящійся къ простымъ числамъ, который я только что нашелъ.

Отыскивая предѣльное выраженіе функцій, которыя опредѣляютъ число простыхъ чиселъ вида $4n+1$ и вида $4n+3$, взятыхъ до нѣкотораго очень большого предѣла, я пришелъ къ заключенію, что эти двѣ функціи значительно отличаются другъ отъ друга своими вторыми членами, причемъ для чиселъ $4n+3$ второй членъ больше чѣмъ для чиселъ $4n+1$; такъ что, если изъ числа простыхъ чиселъ вида $4n+3$, которыя меньше какого нибудь предѣла x, вычесть число простыхъ чиселъ вида $4n+1$, которыя меньше того же предѣла x, и полученную разность раздѣлить на $\frac{\sqrt{x}}{\log x}$, то окажутся такія значенія x, для которыхъ это частное приблизится сколь угодно близко къ единицѣ. Эта разница въ распредѣленіи простыхъ чиселъ вида $4n+1$ и $4n+3$ обнаруживается ясно во многихъ случаяхъ. Напримѣръ, 1) по мѣрѣ того какъ c приближается къ нулю, сумма ряда

$$e^{-3c}-e^{-5c}+e^{-7c}+e^{-11c}-e^{-13c}-e^{-17c}+e^{-19c}+e^{-23c}+\ldots$$

приближается къ $+\infty$; 2) рядъ

$$f(3)-f(5)+f(7)+f(11)-f(13)-f(17)+f(19)+f(23)+\ldots$$



— 698 —

гдѣ $f(x)$ постоянно убывающая функція, можетъ быть сходящимся не иначе, какъ если предѣлъ произведенія $x^{\frac{1}{2}}f(x)$ равенъ нулю при $x=\infty$.

Я пришелъ къ этимъ результатамъ, разсматривая одно уравненіе, которое относится къ простымъ числамъ и заключаетъ, какъ частный случай, найденное раньше г. А. де Полиньякомъ и мною, независимо другъ отъ друга, въ нашихъ изслѣдованіяхъ о простыхъ числахъ.

Примите и проч.

10 марта 1853 г.

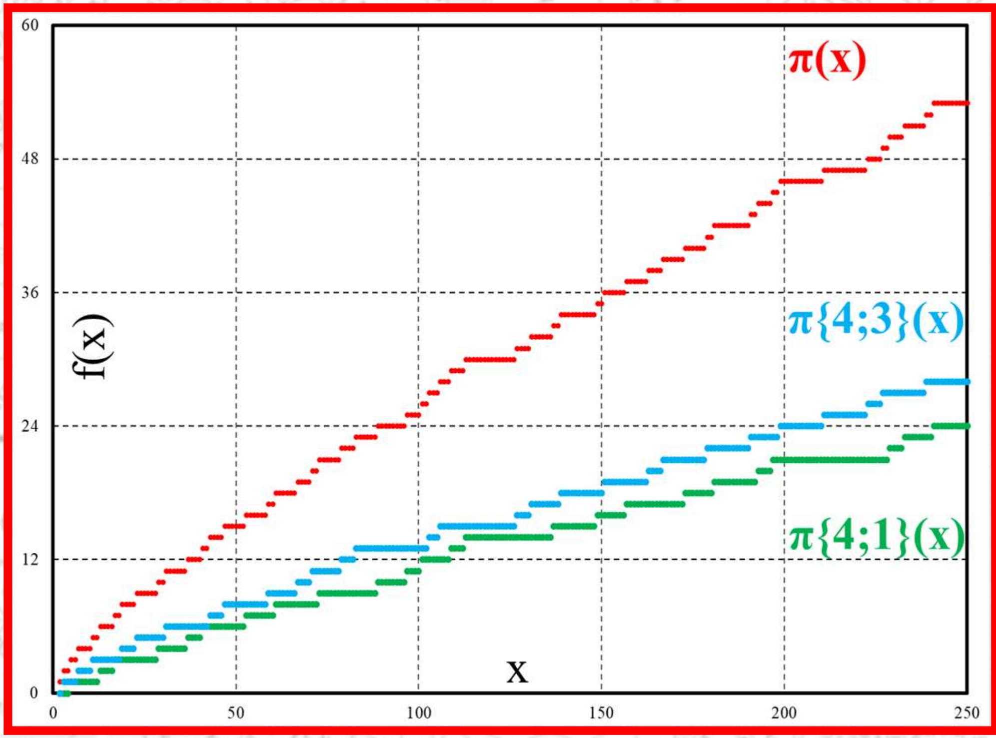
Гипотеза Чебышёва (Чебышёв, 1853). ***Отыскивая предельное выражение функции, которые определяют число простых чисел вида 4n + 1 и вида 4n + 3,*** *взятых до некоторого очень большого предела,* ***я пришел к заключению****, что эти две функции отличаются друг от друга своими вторыми членами,* ***причем для чисел 4n + 3 второй член больше, чем для чисел 4n + 1,*** *так что если из числа простых чисел вида 4n + 3, которые меньше какого-нибудь предела x вычесть число простых чисел вида 4n + 1, которые меньше того же предела x, и полученную разность разделить на $\sqrt{x}/\log x$, то окажутся такие значения x, для которых это частное приблизится сколь угодно близко к единице.*

В 1853 году Чебышёв предположил, что число простых чисел вида 4n + 3 всегда больше, чем число простых чисел вида 4n + 1.

ГИПОТЕЗЫ ЧЕБЫШЁВА ДЛЯ ДВУХ ОСТАТКОВ

$$\pi(x) = \pi_{4,3}(x) + \pi_{4,1}(x) + 1$$

$$\Delta_{4,3,1}(x) = \pi_{4,3}(x) - \pi_{4,1}(x)$$



$\pi(x)$ – функция распределения простых чисел

$q = 4$ – модуль

$(a, q) = 1$, $(b, q)=1$

$a = 3$ и $b = 1$ – остатки по модулю

Гипотеза Чебышева (1853 год): $\Delta_{4,3,1}(x) > 0$ для всех x

- *Первоначальная гипотеза при $q = 4$, $a = 3$, $b = 1$*
- *Аналогичная ситуация при $q = 3$, $a = 2$, $b = 1$*
- *«Гонки простых чисел»*

Гипотеза Чебышёва формулируется через функцию распределения простых чисел $\pi(x)$ для двух остатков a и b от деления на q.

ПРИМЕР ДЛЯ ДВУХ ОСТАТКОВ ПО МОДУЛЮ 4

x	π(x)	#{4n + 2}	#{4n + 3}	#{4n + 1}	Δ{4, 3, 1}	%
100	25	1	13	11	2	2.000%
200	46	1	24	21	3	1.500%
300	62	1	32	29	3	1.000%
400	78	1	40	37	3	0.750%
500	95	1	50	44	6	1.200%
600	109	1	57	51	6	1.000%
700	125	1	65	59	6	0.857%
800	139	1	71	67	4	0.500%
900	154	1	79	74	5	0.556%
1000	168	1	87	80	7	0.700%
2000	303	1	155	147	8	0.400%
3000	430	1	218	211	7	0.233%
4000	550	1	280	269	11	0.275%
5000	669	1	339	329	10	0.200%
6000	783	1	399	383	16	0.267%
7000	900	1	457	442	15	0.214%
8000	1007	1	507	499	8	0.100%
9000	1117	1	562	554	8	0.089%
10,000	1229	1	619	609	10	0.100%
20,000	2262	1	1136	1125	11	0.055%

- *Эффект достаточно* ***небольшой, но постоянный***
- *Процент имеет* ***тенденцию к падению***
- *Во времена Чебышёва и еще 100 лет после него* ***ни одной зоны с отрицательной*** $\boldsymbol{\Delta_{4,3,1}}$ ***известно не было***
- *Только в 1957 году* ***была открыта первая и вторая зоны***

1-я и 2-я зона, где нарушается гипотеза Чебышёва, были открыты только 1957 году, через 100 лет после письма Фуссу.

ОСНОВНЫЕ РАБОТЫ В ОБЛАСТИ ГИПОТЕЗЫ ЧЕБЫШЕВА

1853	***Письмо П.Л. Чебышева академику П.Н. Фуссу***
1914	***J. E. Littlewood, «Sur la distribution des nombres premiers»***
1957	*J. Leech, «Note on the distribution of prime numbers»*
1959	*D. Shanks «Quadratic Residues and the Distribution of Primes»*
1962	***S. Knapowski and P. Turan, «Comparative Prime-Number Theory»***
1978	*C. Bays и R. Hudson, «Details of the first region of integers x with π{3,2}(x) < π{3,1}(x)»*
1978	*R. H. Hudson и C. Bays, «The appearance of tens of billion of integers x with π{24,13}(x) < π{24, 1}(x) in the vicinity of 10^12»*
1979	*C. Bays и R. H. Hudson, «Numerical and graphical description of all axis crossing regions for the moduli 4 and 8 which occur before 10^12»*
1994	***M. Rubinstein и P. Sarnak, «Chebyshev's Bias»***
2001	***C. Bays, K. Ford, R. H. Hudson и M. Rubinstein, «Zeros of Dirichlet L-functions near the Real Axis and Chebyshev's Bias»***
2001	*K. Ford и R. H. Hudson, «Sign changes in pi{q;a}(x) - pi{q;b}(x)»*
2006	*A. Granville и G. Martin, «Prime Number Races»*
2012	*G. Martin и J. Scarfy, «Comparative Prime Number Theory»*
2013	***D. Fiorilli и G. Martin, «Inequities in the Shanks-Renyi prime number race: an asymptotic formula for the densities»***

«Гипотеза Чебышёва дала жизнь большой области современной теории чисел, а именно, сравнительной теории простых чисел» С.В. Конягин и К. Форд.

СВЯЗЬ ГИПОТЕЗЫ ЧЕБЫШЕВА С ДРУГИМИ ТЕОРЕМАМИ

Теорема Дирихле *о простых числах в арифметической прогрессии (Дирихле, 1837). Если l, $k > 0$ — целые числа, и $(l, k) = 1$, тогда существует бесконечно много простых чисел p таких, что $p \equiv l \pmod{k}$.*
Из этой теоремы следовало, что:

$$\frac{\#\{\text{простые числа вида } qn + a \le x\}}{\#\{\text{простые числа вида } qn + b \le x\}} \to 1 \ (\text{при } x \to \infty)$$

Теорема (Литтлвуд, 1914). *Существуют произвольно большие значения x при которых число простых чисел вида $4n + 1$ превышает число простых чисел вида $4n + 3$. При этом существуют произвольно большие значения x для которых справедливо:*

$$\#\{\text{простые числа вида } 4n + 1 \le x\} - \#\{\text{простые числа вида } 4n + 3 \le x\} \ge \frac{1}{2}\frac{\sqrt{x}}{\ln x} \ln\ln\ln x$$

Гипотеза (Кнаповский-Тюран, 1962). *При $X \to \infty$, процент целых чисел $x \le X$, для которых число простых чисел вида $4n + 1$ до x превышает число простых чисел вида $4n + 3$ до того же x, приближается к 0%.*

Теорема (Кацаровский, Рубинштейн, Сарнак, 1994). *Если обобщенная гипотеза Римана (GRH) истинна, то гипотеза Кнаповского-Тюрана должна быть ложной.*

В 1994 году была доказана связь гипотезы Чебышёва с обобщенной гипотезой Римана.

СВЯЗЬ ГИПОТЕЗЫ ЧЕБЫШЕВА С ДРУГИМИ ТЕОРЕМАМИ

Обобщенная гипотеза Римана (GRH) (Пилцт, 1884). *Пусть χ – это характер Дирихле по модулю q. Если $\sigma + it$ – это комплексное число такое что $0 \leq \sigma \leq 1$ и $L(\sigma + it, \chi) = 0$, то $\sigma = 1/2$. При этом (s,χ) является L-функцией Дирихле.*

$$L(s,\chi)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\chi(n)}{n^s}=\prod_{p\ \text{простые}}\left(1-\frac{\chi(p)}{p^s}\right)^{-1}$$

Вид L-функции Дирихле *для «гонки чисел вида 4n + 3 и 4n + 1» (Re(s) > 1):*

$$L(s)=\frac{1}{1^s}-\frac{1}{3^s}+\frac{1}{5^s}-\frac{1}{7^s}+\frac{1}{9^s}-\frac{1}{11^s}+\cdots.$$

Суммирование простых чисел в арифметических прогрессиях сводится к суммированию над нолями L-функции Дирихле

Рубинштейн и Сарнак (1994): *суммирование по простым числам в арифметической прогрессии*

$$\sum_{k\geq 1}\sum_{\substack{k\leq x\\ p^k\equiv a \bmod q}}\frac{1}{k}=\pi(x;q,a)+\frac{1}{2}\left|\{p\ \leq\ \sqrt{x}: p^2\equiv a \bmod q\}\right|+error$$

Из этой формулы видно, что ее второй член является источником гипотезы Чебышёва, когда остаток a не является квадратичным вычетом по модулю q, а остаток b – является

Гипотеза Чебышёва (современная формулировка). *Существует больше простых чисел вида qn + a по сравнению с простыми числами вида **qn + b**, если **a** не является квадратичным вычетом по модулю **q**, а **b** – является.*

Причиной гипотезы Чебышёва является наличие квадратичного вычета среди остатков от деления по модулю q.

ОПРОВЕРЖЕНИЕ ГИПОТЕЗЫ КНАПОВСКОГО-ТЮРАНА

Максимальное значение процента целых чисел $x \leq X$ для которых число простых чисел вида $4n + 1$ до x превышает число простых чисел вида $4n + 3$ до x

Диапазон	Max %
$0\text{-}10^7$	2.6%
$10^7\text{-}10^8$	0.6%
$10^8\text{-}10^9$	0.1%
$10^9\text{-}10^{10}$	1.6%
$10^{10}\text{-}10^{11}$	2.8%

⬇ Leech: 1957 год

⬇ Lehmer: 1969 год

⬇ Lehmer: 1969 год

⬆ Bays & Hudson: 1979 год

⬆ Bays & Hudson: 1979-1996 годы

- *С формулировки гипотезы Кнаповского-Тюрана* ***начинается интенсивный поиск зон изменения знака функции $\Delta_{q,a,b}$*** *для различных модулей и остатков*
- *После работ Бейса и Хадсона, нашедших несколько новых зон с отрицательной $\Delta_{4,3,1}$ стало понятно, что* ***гипотеза Кнаповского-Тюрана неверна***

Эмпирические данные поддерживали гипотезу Кнаповского-Тюрана только до 10^9. После работ Бейса и Хадсона стало понятно, что она неверна.

ЭМПИРИЧЕСКИЕ РЕЗУЛЬТАТЫ: 1957-1996 (q = 3, 4 и 8)

Состояние поиска зон изменения знака $\Delta_{q,a,b}(x)$ с 1957 по 1996 гг.

Q	#	b	a	Начало зоны	Открыты
3	1	1	2	608,981,813,029	Bays & Hudson, 1978
4	1	1	3	26,861	Leech, 1957
4	2	1	3	616,841	Leech, 1957
4	3	1	3	12,306,137	Lehmer, 1969
4	4	1	3	951,784,481	Lehmer, 1969
4	5	1	3	6,309,280,709	Bays & Hudson, 1979
4	6	1	3	18,465,126,293	Bays & Hudson, 1979
4	7	1	3	1,488,478,427,089	Bays & Hudson, 1996
8	1	1	3	Неизвестно до 10^{12}	Не открыты
8	1	1	5	588,067,889	Bays & Hudson, 1979
8	2	1	5	35,615,130,497	Bays & Hudson, 1979
8	1	1	7	Неизвестно до 10^{12}	Не открыты

7 зон отрицательных значений

- *Поиск зон **шел очень медленно,** иногда между открытием зон **проходили десятилетия***
- ***Поиском занимались** такие **выдающиеся математики** как Д. Лич («решетка Лича»), Д. Х. Лемер («тест Люка-Лемера» на простоту) и К. Бейс с Р. Х. Хадсоном (известные работы в теории чисел и оценка «числа Скьюза»)*
- ***Наибольшее количество зон** изменения знака **было найдено для $\Delta_{4,3,1}$***

С 1957 по 1996 шел интенсивный поиск зон отрицательных значений функции Δ в диапазоне до 10^{12}.

ЭМПИРИЧЕСКИЕ РЕЗУЛЬТАТЫ: 1957-1996 (q = 12 и 24)

Состояние поиска зон изменения знака $\Delta_{q,a,b}(x)$ с 1957 по 1996 гг.

q	#	b	a	Начало зоны	Открыты
12	1	1	5	Неизвестно до 10^{12}	Не открыты
12	1	1	7	Неизвестно до 10^{12}	Не открыты
12	1	1	11	Неизвестно до 10^{12}	Не открыты
24	1	1	5	Неизвестно до 10^{12}	Не открыты
24	1	1	7	Неизвестно до 10^{12}	Не открыты
24	1	1	11	Неизвестно до 10^{12}	Не открыты
24	1	1	13	«В районе 10^{12}»	Bays & Hudson, 1978
24	1	1	17	Неизвестно до 10^{12}	Не открыты
24	1	1	19	Неизвестно до 10^{12}	Не открыты
24	1	1	23	Неизвестно до 10^{12}	Не открыты

Точно не определена

- *За исключением $\Delta_{24,13,1}$ по модулям 12 и 24* ***не было найдено ни одной зоны изменения знака*** *функции Δ*
- *Для $\Delta_{24,13,1}$* ***первая зона была определена приблизительно****, без точных границ и количества членов*

Наибольшие проблемы возникли с модулями 12 и 24 по которым не было известно практически ничего.

ЭМПИРИЧЕСКИЕ РЕЗУЛЬТАТЫ: 1996-2016

Состояние поиска зон изменения знака $\Delta_{q,a,b}(x)$ с 1996 по 2016 гг.

q	#	b	a	Начало зоны	Открыты
3	2	1	2	6,148,171,711,663	Johnson, 2011
8	1	1	7	192,252,423,729,713	Martin, 2016

Найдено с ошибками

Найдено только первое значение

- ***Новые зоны находились очень редко***
- *Диапазон выше 10^{12} долгие годы* ***был за пределами технических возможностей*** *того времени*
- *И Джонсон и Мартин* ***были программистами, а не математиками***
- *«Практика – лучший критерий истины»:* ***ни одна модель не опровергнет объективно найденной зоны отрицательных значений $\Delta_{q,a,b}$***

За 20 лет с 1996 года было найдено всего две зоны, да и то с неполной или неточной информацией.

ЛОГАРИФМИЧЕСКАЯ ПЛОТНОСТЬ

Теорема (Рубинштейн и Сарнак, 1994). *При стремлении $X \to \infty$*

$$\frac{1}{\log X} \sum_{\substack{x \le X \\ \pi_{4,3}(x) > \pi_{4,1}(x)}} \frac{1}{x} \to 0.9959\ldots$$

По сути, это означало, что **«Чебышёв был прав на 99.59%»**

Теорема (Рубинштейн и Сарнак, 1994). *Пусть $(a_1,q)=(a_2,q)=1$ такие что $a_1 \neq a_2$ mod q. Тогда логарифмическая плотность*

$$\delta(q; a1, a2) \coloneqq \lim_{X \to \infty} \frac{1}{\log X} \int_{\substack{t \in [2,X] \\ \pi(t;q,a_1) > \pi(t;q,a_2)}} \frac{dt}{t}$$

существует и является положительной.

В 1994 году было доказано существование у Δ конечной логарифмической плотности, означавшей вероятность того, что $\pi_{4,3}(x) > \pi_{4,1}(x)$.

САМЫЕ «НЕСПРАВЕДЛИВЫЕ ГОНКИ ПРОСТЫХ ЧИСЕЛ»

Самые «несправедливые гонки простых чисел» - наибольшие значения δ(q;a,1) и статус на 2013 год (Fiorilli & Martin)

#	q	b	a	δ(q;a,1)	Статус (2013)
1	24	1	5	0.999988	Не найдены до 10^{12}
2	24	1	11	0.999983	Не найдены до 10^{12}
3	12	1	11	0.999977	Не найдены до 10^{12}
4	24	1	23	0.999889	Не найдены до 10^{12}
5	24	1	7	0.999834	Не найдены до 10^{12}
6	24	1	19	0.999719	Не найдены до 10^{12}
7	8	1	3	0.999569	Не найдены до 10^{12}
8	12	1	5	0.999206	Не найдены до 10^{12}
9	24	1	17	0.999125	Не найдены до 10^{12}
10	3	1	2	0.999063	Известны до 10^{12}
11	8	1	7	0.998939	Не найдены до 10^{12}
12	24	1	13	0.998722	Известны до 10^{12}
13	12	1	7	0.998606	Не найдены до 10^{12}
14	8	1	5	0.997395	Известны до 10^{12}
15	4	1	3	0.995928	Известны до 10^{12}

- ***Фундаментальная работа*** *2013 года*
- *Подсчитаны значения логарифмической плотности для 120 «гонок простых чисел»*
- ***15 самых интересных были выбраны для проверки*** *в рамках проекта*

Точно не определена

В 2013 году были рассчитаны самые «несправедливые гонки простых чисел», которые и были выбраны для проверки до 10^{15}.

ПРЕДСКАЗАНИЯ НОВЫХ ЗОН: q = 3, 4 и 8

Предсказания по возможным зонам изменения знака $\Delta_{q,a,b}(x)$ до 10^{20}

q	#	b	a	Начало	Прогноз	
q=3	2	1	2	$6.15*10^{12}$	Bays & Hudson, 2001	CHECK!
q=3	3	1	2	$3.97*10^{19}$	Bays & Hudson, 2001	
q=3	3	1	2	$3.97*10^{19}$	Ford & Hudson, 2001	
q=4	8	1	3	$9.32*10^{12}$	Bays & Hudson, 2001	CHECK!
q=4	9	1	3	$9.97*10^{17}$	Deléglise, Dusart & Roblot, 2004	
q=8	1	1	3	$6.82*10^{18}$	Ford & Hudson, 2001	
q=8	1	1	5	$1.93*10^{14}$	Ford & Hudson, 2001	CHECK!
q=8	2	1	5	$9.32*10^{14}$	Ford & Hudson, 2001	CHECK!
q=8	1	1	7	$1.93*10^{14}$	Bays & Hudson, 2001	CHECK!
q=8	1	1	7	$1.93*10^{14}$	Ford & Hudson, 2001	CHECK!

- ***Одна из целей работы – проверить прогнозы*** *по новым зонам, сделанные в начале 2000-х*
- *Часть прогнозов (>10^{18})* ***лежала далеко за пределами технических возможностей*** *того времени*
- *Для работы в этих областях* ***нужны суперкомпьютеры и полностью параллельные вычисления***

Для q = 3, 4 и 8 было предсказано существования 6 зон отрицательных значений Δ до границы проверки равной 10^{15}.

ПРЕДСКАЗАНИЯ НОВЫХ ЗОН: q = 12 и 24

Предсказания по возможным зонам изменения знака $\Delta_{q,a,b}(x)$ до 10^{20}

q	#	b	a	Начало	Прогноз
q=12	1	1	5	$9.84*10^{16}$	Ford & Hudson, 2001
q=12	1	1	7	$9.78*10^{16}$	Ford & Hudson, 2001
q=12	1	1	11	Нет < 10^{20}	Ford & Hudson, 2001
q=24	1	1	5	Нет < 10^{20}	Ford & Hudson, 2001
q=24	1	1	7	Нет < 10^{20}	Ford & Hudson, 2001
q=24	1	1	11	Нет < 10^{20}	Ford & Hudson, 2001
q=24	1	1	13	$6.74*10^{14}$	Ford & Hudson, 2001
q=24	1	1	17	$6.18*10^{14}$	Ford & Hudson, 2001
q=24	2	1	17	$7.11*10^{14}$	Ford & Hudson, 2001
q=24	1	1	19	$7.15*10^{14}$	Ford & Hudson, 2001
q=24	1	1	23	$7.44*10^{18}$	Ford & Hudson, 2001

CHECK!

CHECK!

CHECK!

CHECK!

- ***Одна из целей работы – проверить прогнозы*** *по новым зонам, сделанные в начале 2000-х*
- *Ситуация с q = 12 и q = 24 была аналогична – часть прогнозов (>10^{18})* ***лежала далеко за пределами технических возможностей*** *того времени*

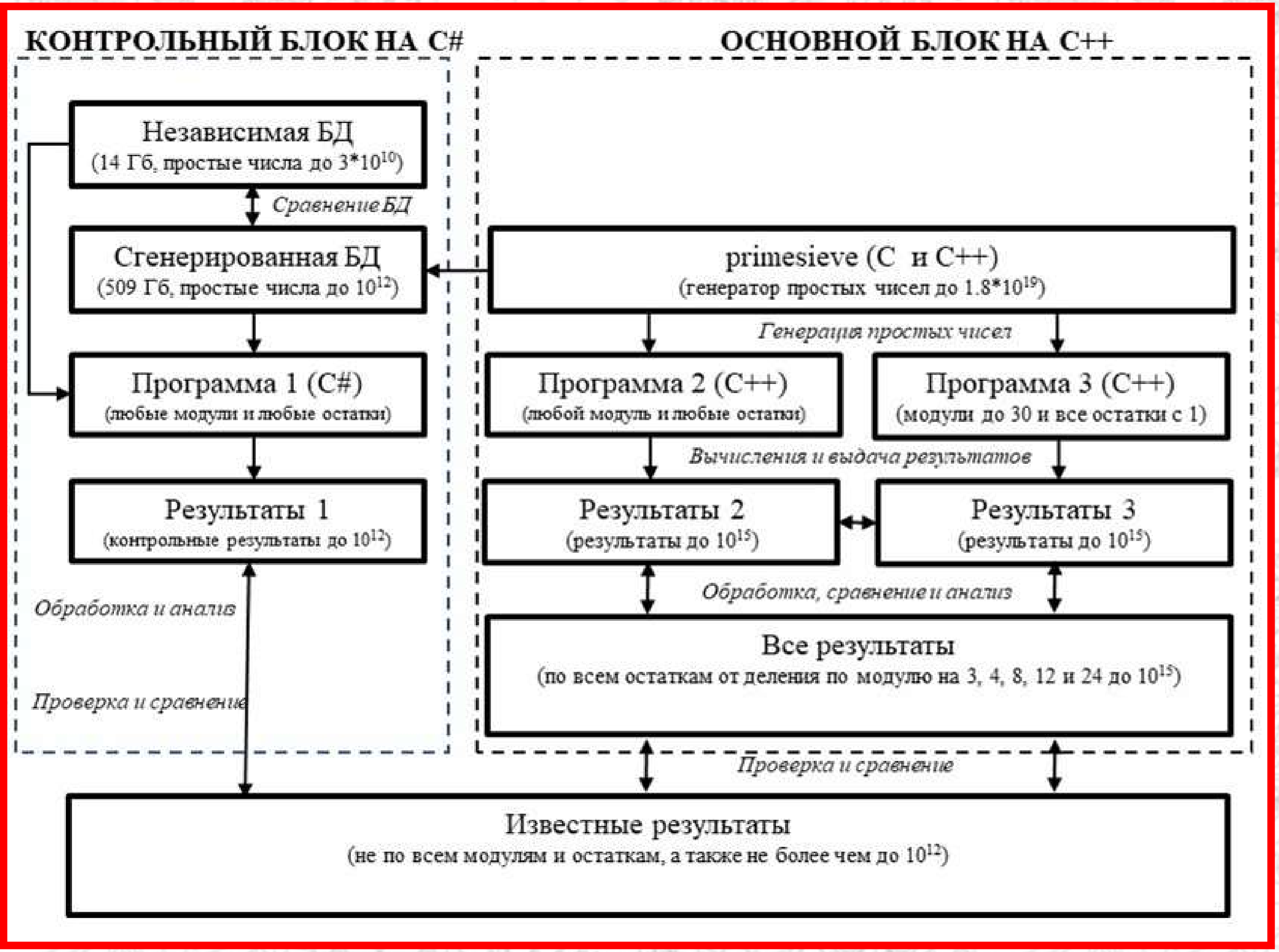
Для q = 12 и 24 было предсказано существования 4 зон отрицательных значений Δ до границы проверки равной 10^{15}.

ТЕХНИЧЕСКИЕ ТРУДНОСТИ

- ***Диапазон 10^{15} казался нереально высоким для прямой численной проверки*** *17 лет назад (в 2001 году), когда Bays & Hudson подводили итог своей 25-летней работы*
- *Прямая численная проверка «методом грубой силы»* ***являлась чрезвычайно затратной с точки зрения вычислительных ресурсов*** *и чувствительной к непрерывному исполнению*
- ***Не было*** *быстрых и многопоточных* ***генераторов простых чисел***
- *Без быстрого генератора простых чисел их* ***база данных занимала слишком много места*** *(сотни терабайт и петабайты)*
- ***Нужны были быстрые и доступные сервера****, способные бесперебойно и безошибочно работать в режиме 24 х 7 многие недели и месяцы*
- ***Многие предсказанные зоны находились в районе 10^{18}*** *– значительно выше, чем10^{15}, что также отбивало охоту их искать*
- *Для работы выше 10^{18}* ***нужны суперкомпьютеры и полностью параллельные вычисления***

Прямая численная проверка всех простых чисел до 10^{15} на соответствие гипотезе Чебышева была труднореализуема до недавнего времени.

СХЕМА РЕАЛИЗАЦИИ ПРОЕКТА



- ***2 программы на C++***
- *Можно проверять* ***простые числа до 10^{19}***
- ***Контрольная программа*** *на C# (с БД простых чисел до 10^{12})*
- *Взяты для проверки* ***3 диапазона: 10^{13}, 10^{14}, 10^{15}***
- *Минимум* ***два прохода*** *для каждого диапазона и каждой группы модулей и пар остатков*
- *После создания программ проверка шла* ***в начале 2018 года***

Для реализации проекта было написано несколько программ и использовался быстрый генератор простых чисел primesieve.

РЕЗУЛЬТАТЫ: q = 3 (простые числа и их порядковые номера)

Характеристика зон для q = 3: простые числа

q	№	b	a	Начало	Конец	# Δ = -1	OEIS
q = 3	1	1	2	608,981,813,029	610,968,213,787	20,590	A297006
q = 3	2	1	2	6,148,171,711,663	6,156,051,951,677	63,733	A297006
Всего	**2**	**1**	**2**			**84,323**	**A297006**

NEW! V *$6.15*10^{12}$*

Характеристика зон для q = 3: порядковые номера простых чисел (функция π(x))

q	№	b	a	Начало	Конец	# Δ = -1	OEIS
q = 3	1	1	2	23,338,590,792	23,411,791,034	20,590	A297005
q = 3	2	1	2	216,415,270,060	216,682,882,512	63,733	A297005
Всего	**2**	**1**	**2**			**84,323**	**A297005**

NEW! V

- ***Вторая зона совпала*** *с предсказаниями Bays & Hudson (2001) - $6.15*10^{12}$*
- *Зарегистрированы* ***две новые последовательности*** *A297006 и A297005*

Для q=3 была полностью и правильно определена вторая зона отрицательных значений Δ, практически совпавшая с предсказанной в 2001 году.

РЕЗУЛЬТАТЫ: q = 4 (простые числа)

Характеристика зон для q = 4: простые числа

q	№	b	a	Начало	Конец	# Δ= -1	OEIS		
q = 4	1	1	3	26,861	26,861	1	A051025		
q = 4	2	1	3	616,841	633,797	90	A051025		
q = 4	3	1	3	12,306,137	12,382,313	150	A051025		
q = 4	4	1	3	951,784,481	952,223,473	396	A051025		
q = 4	5	1	3	6,309,280,709	6,403,150,189	6,205	A051025		
q = 4	6	1	3	18,465,126,293	19,033,524,533	6,524	A051025		
q = 4	7	1	3	1,488,478,427,089	1,494,617,929,603	14,189	A051025		
q = 4	8	1	3	9,103,362,505,801	9,543,313,015,309	391,378	A051025	NEW!	V *9.32*10^12*
q = 4	9	1	3	64,083,080,712,569	64,084,318,523,021	13,370	A051025	NEW!	! *9.97*10^17*
q = 4	10	1	3	715,725,135,905,981	732,156,384,107,921	481,194	A051025	NEW!	!
Всего	**10**	**1**	**3**			**913,497**	**A051025**		

- ***Восьмая зона оказалась ниже,*** *чем предсказывалось Bays & Hudson (2001) - 9.32*10^{12}*
- ***Девятая и десятая зоны не ожидались до 10^{18}***
- ***Дополнены две последовательности*** *A051025 и A051024, имевшие до этого всего 33 и 30 членов соответственно*

Для q=4 были обнаружены три новые зоны – 8-я, 9-я и 10-я. В соответствии с моделями последние две не ожидались ниже 10^{18}.

РЕЗУЛЬТАТЫ: q = 4 (порядковые номера)

Характеристика зон для q = 4: порядковые номера простых чисел (функция π(x))

q	№	b	a	Начало	Конец	# Δ = -1	OEIS	
q = 4	1	1	3	2,946	2,946	1	A051024	
q = 4	2	1	3	50,378	51,622	90	A051024	
q = 4	3	1	3	806,808	811,528	150	A051024	
q = 4	4	1	3	48,517,584	48,538,970	396	A051024	
q = 4	5	1	3	293,267,470	297,424,714	6,205	A051024	
q = 4	6	1	3	817,388,828	841,415,718	6,524	A051024	
q = 4	7	1	3	55,152,203,450	55,371,233,730	14,189	A051024	
q = 4	8	1	3	316,064,952,540	330,797,040,308	391,378	A051024	NEW! V
q = 4	9	1	3	2,083,576,475,506	2,083,615,410,040	13,370	A051024	NEW! !
q = 4	10	1	3	21,576,098,946,648	22,056,324,317,296	481,194	A051024	NEW! !
Всего	**10**	**1**	**3**			**913,497**	**A051024**	

- ***Восьмая зона оказалась ниже,*** *чем предсказывалось Bays & Hudson (2001)*
- *В соответствии с теоретическими моделями,* ***девятая и десятая зоны не ожидались так низко***
- ***Дополнены две последовательности*** *A051025 и A051024, имевшие до этого всего 33 и 30 членов соответственно*

Для q=4 были обнаружены три новые зоны – 8-я, 9-я и 10-я. В соответствии с моделями последние две не ожидались ниже 10^{18}.

РЕЗУЛЬТАТЫ: q = 8 (простые числа)

Характеристика зон для q = 8: простые числа

q	№	b	a	Начало	Конец	# Δ = -1	OEIS			
q = 8	**1**	**1**	**3**	**Не найдены до 10^{15}**						
q = 8	1	1	5	588,067,889	593,871,533	488	A297448			
q = 8	2	1	5	35,615,130,497	37,335,021,821	22,305	A297448			
q = 8	3	1	5	5,267,226,902,633	5,312,932,515,721	109,831	A297448	NEW!	!	
q = 8	4	1	5	5,758,938,230,761	5,768,749,719,461	48,229	A297448	NEW!	!	
q = 8	5	1	5	6,200,509,945,537	6,209,511,651,289	18,048	A297448	NEW!	!	
q = 8	6	1	5	192,189,726,613,273	194,318,969,449,909	465,274	A297448	NEW!	V	*$1.93*10^{14}$*
q = 8	7	1	5	930,525,161,507,057	932,080,335,660,277	186,057	A297448	NEW!	V	*$9.32*10^{14}$*
Total	**7**	**1**	**5**			**850,232**	**A297448**			
q = 8	1	1	7	192,252,423,729,713	192,876,135,747,311	234,937	A295354	NEW!	V	*$1.93*10^{14}$*
Total	**1**	**1**	**7**			**234,937**	**A295354**			

- ***Не обнаружено ни одной зоны*** *для $\Delta_{8,3,1}(x)$*
- *Из пяти новых обнаруженных зон для $\Delta_{8,5,1}(x)$* ***правильно была предсказана только две самых широких*** *– шестая ($1.93*10^{14}$) и седьмая ($9.32*10^{14}$)*
- *Первая зона для $\Delta_{8,7,1}(x)$* ***была также предсказана правильно*** *($1.93*10^{14}$)*
- ***Зарегистрировано четыре новых последовательности****: A297448, A297447, A295354 и A295353*

Из пяти новых обнаруженных зон теоретические модели правильно предсказали только две.

РЕЗУЛЬТАТЫ: q = 8 (порядковые номера)

Характеристика зон для q = 8: порядковые номера простых чисел (функция π(x))

q	№	b	a	Начало	Конец	# Δ = -1	OEIS		
q = 8	**1**	**1**	**3**	**Не найдены до 10^{15}**					
q = 8	1	1	5	30,733,704	31,021,248	488	A297447		
q = 8	2	1	5	1,531,917,197	1,602,638,725	22,305	A297447		
q = 8	3	1	5	186,422,420,112	187,982,502,637	109,831	A297447	NEW!	!
q = 8	4	1	5	203,182,722,672	203,516,651,165	48,229	A297447	NEW!	!
q = 8	5	1	5	218,192,372,353	218,497,974,121	18,048	A297447	NEW!	!
q = 8	6	1	5	6,033,099,205,868	6,097,827,689,926	465,274	A297447	NEW!	V
q = 8	7	1	5	27,830,993,289,634	27,876,113,171,315	186,057	A297447	NEW!	V
Total	**7**	**1**	**5**			**850,232**	**A297447**		
q = 8	1	1	7	6,035,005,477,560	6,053,968,231,350	234,937	A295353	NEW!	V
Total	**1**	**1**	**7**			**234,937**	**A295353**		

- ***Не обнаружено ни одной зоны** для $\Delta_{8,3,1}(x)$*
- *Из пяти новых обнаруженных зон для $\Delta_{8,5,1}(x)$ **правильно была предсказаны только две самых широких** – шестая и седьмая*
- *Первая зона для $\Delta_{8,7,1}(x)$ **была также предсказана правильно***
- ***Зарегистрировано четыре новых последовательности**: A297448, A297447, A295354 и A295353*

Из пяти новых обнаруженных зон теоретические модели правильно предсказали только две.

РЕЗУЛЬТАТЫ: q = 12 (простые числа и их порядковые номера)

Характеристика зон для q = 12: простые числа

q	№	b	a	Начало	Конец	# Δ = -1	OEIS		
q = 12	1	1	5	25,726,067,172,577	25,727,487,045,613	8,399	A297355	NEW!	! $9.84*10^{16}$
Всего	**1**	**1**	**5**			**8,399**	**A297355**		
q = 12	1	1	7	27,489,101,529,529	27,555,497,263,753	55,596	A297357	NEW!	! $9.78*10^{16}$
Всего	**1**	**1**	**7**			**55,596**	**A297357**		
q = 12	**1**	**1**	**11**	**Не обнаружены до 10^{15}**					

Характеристика зон для q = 12: порядковые номера простых чисел (функция π(x))

q	№	b	a	Начало	Конец	# Δ = -1	OEIS		
q = 12	1	1	5	862,062,606,318	862,108,594,325	8,399	A297354	NEW!	!
Всего	**1**	**1**	**5**			**8,399**	**A297354**		
q = 12	1	1	7	919,096,512,484	921,242,027,614	55,596	A297356	NEW!	!
Всего	**1**	**1**	**7**			**55,596**	**A297356**		
q = 12	**1**	**1**	**11**	**Не обнаружены до 10^{15}**					

- ***Не обнаружено ни одной зоны*** *для $\Delta_{12,1,1}(x)$*
- *Обнаруженная зона для $\Delta_{12,5,1}(x)$* ***оказалась очень узкой и значительно ниже,*** *чем предсказывалось ($9.84*10^{16}$)*
- *Обнаруженная зона для $\Delta_{12,7,1}(x)$* ***оказалась узкой и значительно ниже****, чем предсказывалось ($9.78*10^{16}$)*
- ***Зарегистрировано четыре новых последовательности*** *A297355, A297354, A297357 и A297356*

В диапазоне до 10^{15} теоретические модели не смогли предсказать ни одной из двух новых обнаруженных узких зон.

РЕЗУЛЬТАТЫ: q = 24 (простые числа)

Характеристика зон для q = 24: простые числа

q	№	b	a	Начало	Конец	# Δ = -1	OEIS			
q = 24	**1**	**1**	**5**	**Не обнаружены до 10^{15}**						
q = 24	**1**	**1**	**7**	**Не обнаружены до 10^{15}**						
q = 24	**1**	**1**	**11**	**Не обнаружены до 10^{15}**						
q = 24	1	1	13	978,412,359,121	989,462,029,561	9,920	A295356			
q = 24	2	1	13	1,005,578,970,337	1,009,517,096,641	22,648	A295356	NEW!	(!)	
q = 24	3	1	13	1,025,403,695,233	1,096,157,101,033	111,408	A295356	NEW!	(!)	
q = 24	4	1	13	648,452,989,927,609	649,632,972,248,893	202,195	A295356	NEW!	(!)	
q = 24	5	1	13	655,404,854,710,621	662,189,414,787,361	594,414	A295356	NEW!	(V)	$6.74*10^{14}$
q = 24	6	1	13	687,936,222,802,693	699,914,738,212,849	1,441,319	A295356	NEW!	(V)	
Всего	**6**	**1**	**13**			**2,381,904**	**A295356**			
q = 24	1	1	17	617,139,273,158,713	618,051,990,355,993	73,201	A297450	NEW!	(V)	$6.18*10^{14}$
q = 24	2	1	17	709,763,768,223,841	714,186,411,923,009	773,982	A297450	NEW!	(V)	$7.11*10^{14}$
q = 24	3	1	17	772,451,788,864,537	772,739,867,710,897	116,739	A297450	NEW!	(!)	
Всего	**3**	**1**	**17**			**963,922**	**A297450**			
q = 24	1	1	19	706,866,045,116,113	709,591,447,226,587	260,586	A298821	NEW!	(!)	
q = 24	2	1	19	716,328,072,795,619	725,993,117,452,657	833,790	A298821	NEW!	(V)	$7.15*10^{14}$
q = 24	3	1	19	731,496,205,367,611	733,085,386,984,849	306,557	A298821	NEW!	(!)	
q = 24	4	1	19	739,965,838,936,153	756,906,118,578,763	1,586,533	A298821	NEW!	(!)	
q = 24	5	1	19	761,403,326,459,539	766,164,822,666,883	449,524	A298821	NEW!	(!)	
Всего	**5**	**1**	**19**			**3,436,990**	**A298821**			
q = 24	**1**	**1**	**23**	**Не обнаружены до 10^{15}**						

- ***Зарегистрировано шесть новых последовательностей*** *A295356, A295355, A297450, A297449, A298821 и A298820*

Для q=24 были обнаружены 13 новых зон для $\Delta_{24,13,1}(x)$, $\Delta_{24,17,1}(x)$ и $\Delta_{24,19,1}(x)$.

РЕЗУЛЬТАТЫ: q = 24 (порядковые номера)

Характеристика зон для q = 24: порядковые номера простых чисел (функция π(x))

q	№	b	a	Начало	Конец	# Δ = -1	OEIS		
q = 24	**1**	**1**	**5**	**Не обнаружены до 10^{15}**					
q = 24	**1**	**1**	**7**	**Не обнаружены до 10^{15}**					
q = 24	**1**	**1**	**11**	**Не обнаружены до 10^{15}**					
q = 24	1	1	13	36,826,322,708	37,226,458,011	9,920	A295355		
q = 24	2	1	13	37,809,796,159	37,952,282,986	22,648	A295355	NEW!	!
q = 24	3	1	13	38,526,874,563	41,082,097,577	111,408	A295355	NEW!	!
q = 24	4	1	13	19,606,529,038,612	19,641,125,979,304	202,195	A295355	NEW!	!
q = 24	5	1	13	19,810,330,673,460	20,009,166,153,467	594,414	A295355	NEW!	V
q = 24	6	1	13	20,763,192,869,094	21,113,714,560,133	1,441,319	A295355	NEW!	V
Всего	**6**	**1**	**13**			**2,381,904**	**A295355**		
q = 24	1	1	17	18,687,728,175,380	18,714,528,041,257	73,201	A297449	NEW!	V
q = 24	2	1	17	21,401,790,499,965	21,531,111,289,460	773,982	A297449	NEW!	V
q = 24	3	1	17	23,232,693,876,716	23,241,097,440,243	116,739	A297449	NEW!	!
Всего	**3**	**1**	**17**			**963,922**	**A297449**		
q = 24	1	1	19	21,317,046,795,798	21,396,751,256,986	260,586	A298820	NEW!	!
q = 24	2	1	19	21,593,726,305,432	21,876,231,682,201	833,790	A298820	NEW!	V
q = 24	3	1	19	22,037,035,819,978	22,083,466,138,743	306,557	A298820	NEW!	!
q = 24	4	1	19	22,284,455,265,595	22,779,076,769,443	1,586,533	A298820	NEW!	!
q = 24	5	1	19	22,910,331,360,479	23,049,274,819,456	449,524	A298820	NEW!	!
Всего	**5**	**1**	**19**			**3,436,990**	**A298820**		
q = 24	**1**	**1**	**23**	**Не обнаружены до 10^{15}**					

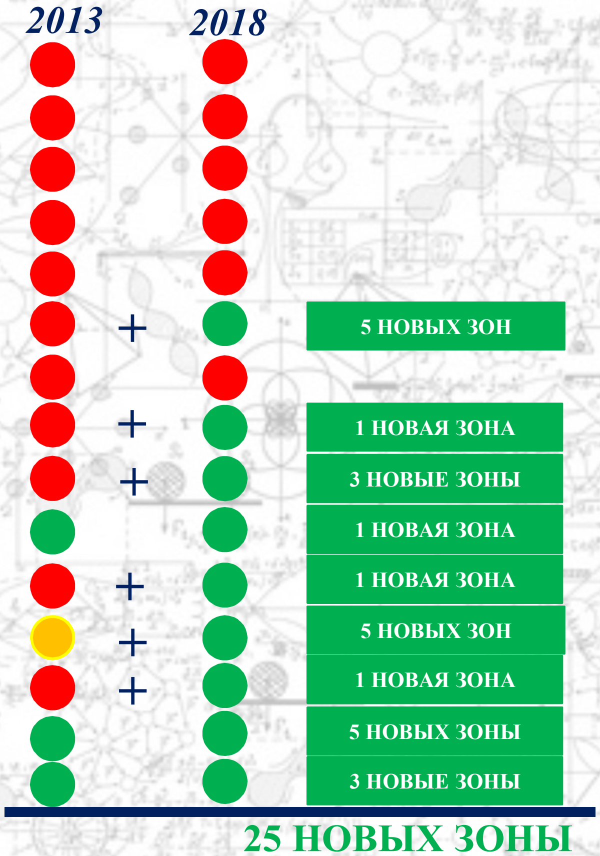
- ***Зарегистрировано шесть новых последовательностей*** *A295356, A295355, A297450, A297449, A298821 и A298820*

Для q=24 были обнаружены 13 новых зон для $\Delta_{24,13,1}(x)$, $\Delta_{24,17,1}(x)$ и $\Delta_{24,19,1}(x)$.

РЕЗУЛЬТАТЫ

Самые «несправедливые гонки простых чисел» - наибольшие значения δ(q;a,1) и статус на начало 2018 года

#	q	b	a	δ(q;a,1)	Статус (2018)
1	24	1	5	0.999988	Не найдены до 10^{15}
2	24	1	11	0.999983	Не найдены до 10^{15}
3	12	1	11	0.999977	Не найдены до 10^{15}
4	24	1	23	0.999889	Не найдены до 10^{15}
5	24	1	7	0.999834	Не найдены до 10^{15}
6	24	1	19	0.999719	Найдены до 10^{15}
7	8	1	3	0.999569	Не найдены до 10^{15}
8	12	1	5	0.999206	Найдены до 10^{15}
9	24	1	17	0.999125	Найдены до 10^{15}
10	3	1	2	0.999063	Известны до 10^{15}
11	8	1	7	0.998939	Найдены до 10^{15}
12	24	1	13	0.998722	Известны до 10^{15}
13	12	1	7	0.998606	Найдены до 10^{15}
14	8	1	5	0.997395	Известны до 10^{15}
15	4	1	3	0.995928	Известны до 10^{15}

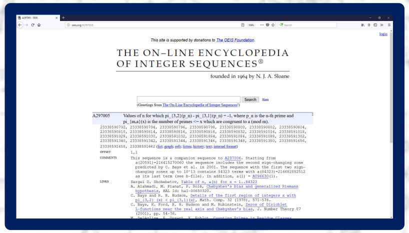


- ***Открыты 4 первые зоны*** *для 4 самых «несправедливых гонок простых чисел» из 15*
- ***Отрыто 24 новых зоны*** *изменения знака функции* $\Delta_{q,a,b}(x)$
- ***Зарегистрировано*** *18 новых последовательностей*
- *Из первых 15,* ***для 6 «гонок простых чисел» все еще не известно ни одной зоны***

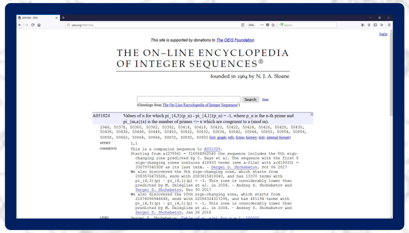
Реализация проекта позволила существенно продвинуться в поисках зон отрицательных значений Δ для самых интересных «гонок простых чисел».

РЕЗУЛЬТАТЫ: ОПУБЛИКОВАННЫЕ ДАННЫЕ

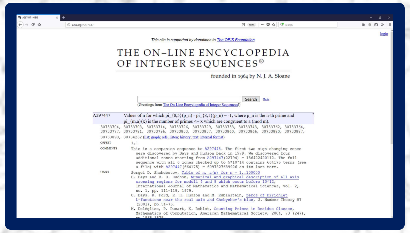
A297005: $\pi(x)\{\Delta_{3,2,1}(x)=-1\}$



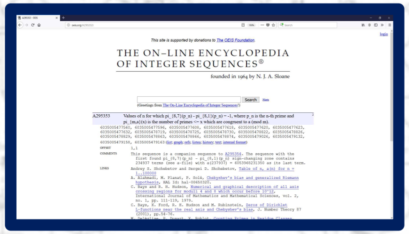
A051024: $\pi(x)\{\Delta_{4,3,1}(x)=-1\}$



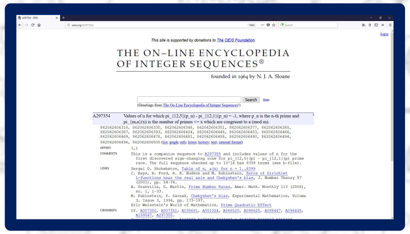
A297447: $\pi(x)\{\Delta_{8,5,1}(x)=-1\}$



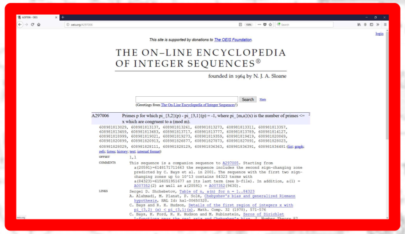
A295353: $\pi(x)\{\Delta_{8,7,1}(x)=-1\}$



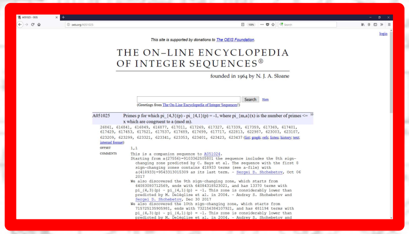
A297354: $\pi(x)\{\Delta_{12,5,1}(x)=-1\}$



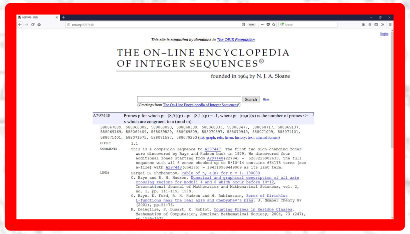
A297006: $p(x)\{\Delta_{3,2,1}(x)=-1\}$



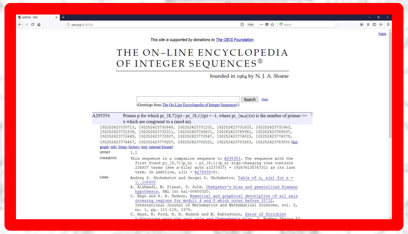
A051025: $p(x)\{\Delta_{4,3,1}(x)=-1\}$



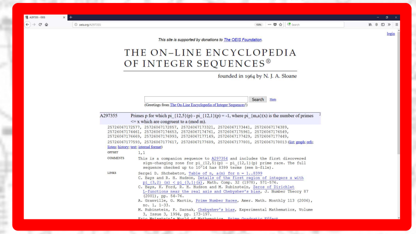
A297448: $p(x)\{\Delta_{8,5,1}(x)=-1\}$



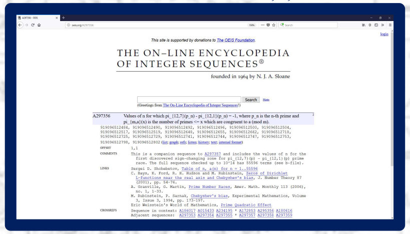
A295354: $p(x)\{\Delta_{8,7,1}(x)=-1\}$



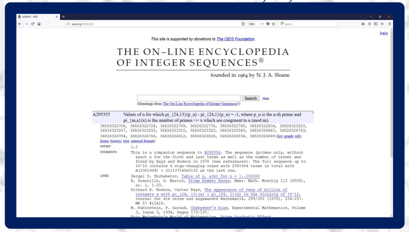
A297355: $p(x)\{\Delta_{12,5,1}(x)=-1\}$



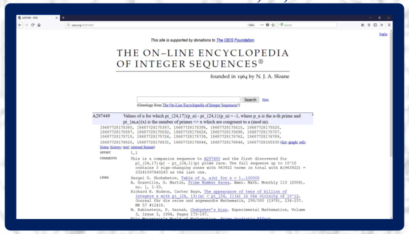
A297356: $\pi(x)\{\Delta_{12,7,1}(x)=-1\}$



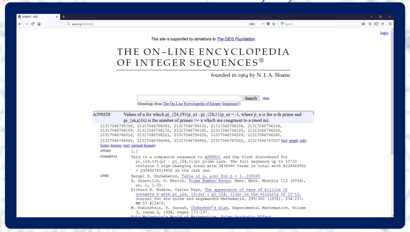
A295355: $\pi(x)\{\Delta_{24,13,1}(x)=-1\}$



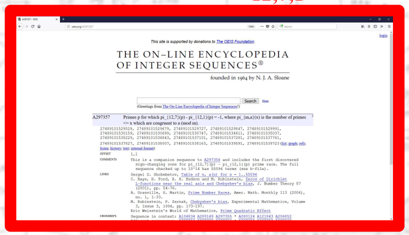
A297449: $\pi(x)\{\Delta_{24,17,1}(x)=-1\}$



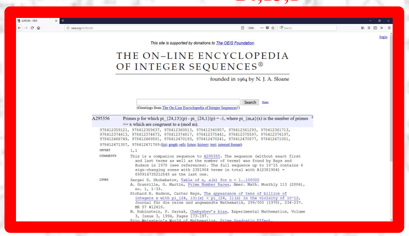
A298820: $\pi(x)\{\Delta_{24,19,1}(x)=-1\}$



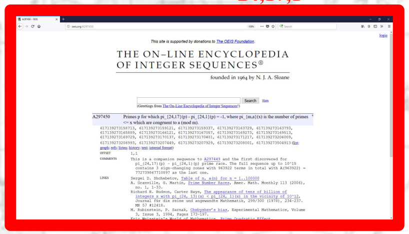
A297357: $p(x)\{\Delta_{12,7,1}(x)=-1\}$



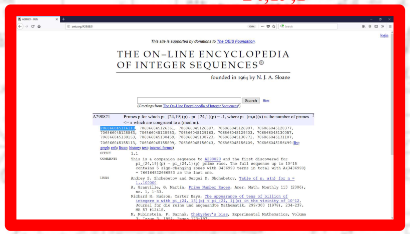
A295356: $p(x)\{\Delta_{24,13,1}(x)=-1\}$



A297450: $p(x)\{\Delta_{24,17,1}(x)=-1\}$

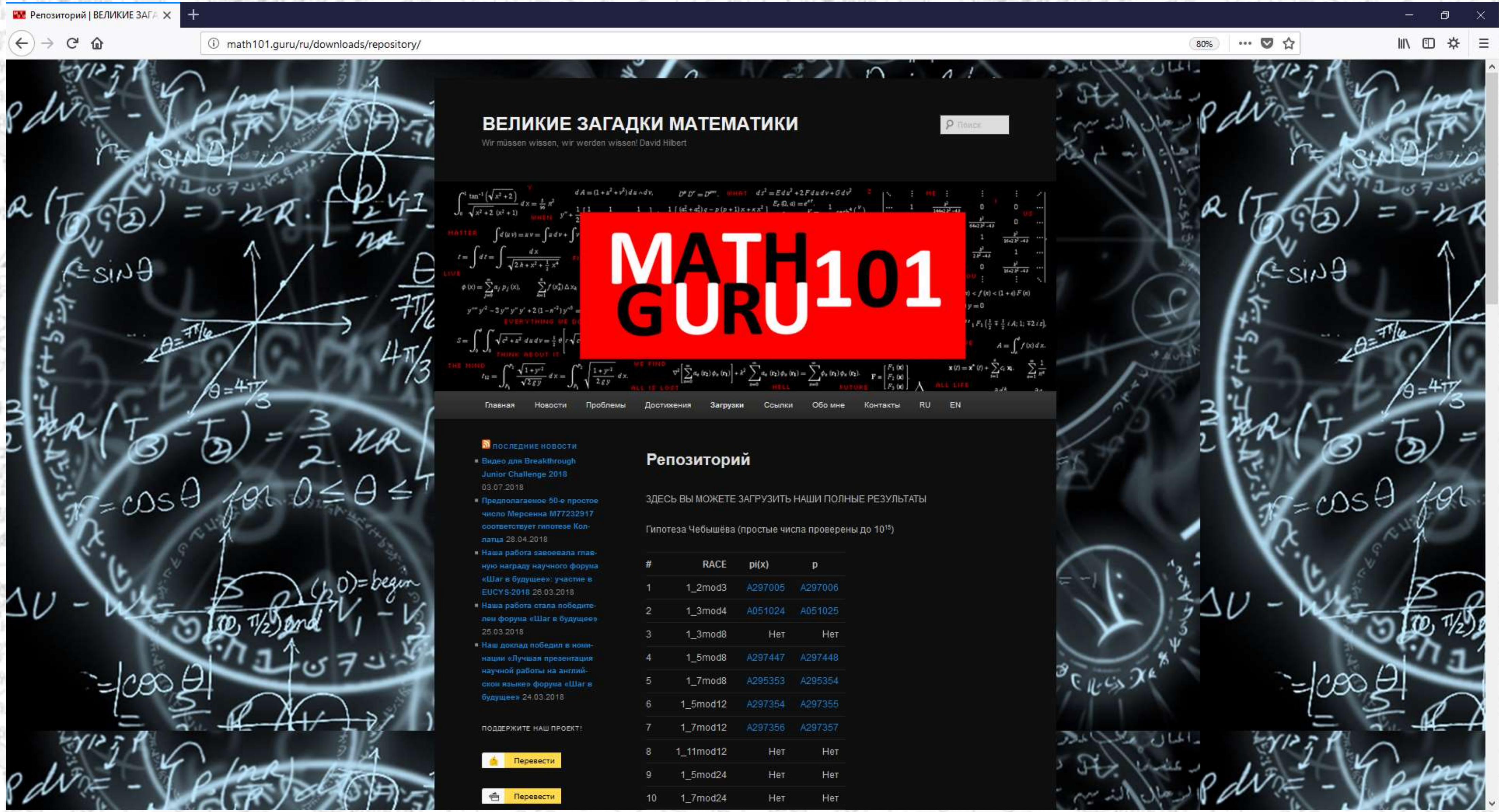


A298821: $\pi(x)\{\Delta_{24,19,1}(x)=-1\}$



Все данные были опубликованы в OEIS в виде 18 отдельных последовательностей.

РЕЗУЛЬТАТЫ: ОПУБЛИКОВАННЫЕ ДАННЫЕ



Полные результаты проекта также доступны для загрузки в репозитории на сайте (http://math101.guru/ru/downloads/repository/).

РЕЗУЛЬТАТЫ: ЗАКЛЮЧЕНИЕ

- ***Проверена гипотеза Чебышёва до 10^{15}*** *для 15 «самых несправедливых гонок простых чисел»*
- ***Открыты 4 первые зоны*** *для 4 из выбранных 15* ***(для 6 гонок все еще не известно ни одной зоны)***
- ***Найдено 25 новых зон*** *изменения знака функции Δ; каждая зона поддерживает справедливость Обобщенной гипотезы Римана*
- ***Подтверждено, что теоретические модели пропускают небольшие и узкие зоны,*** *которые встречаются чаще, чем предполагалось*
- *Показано, что* ***теоретические модели неплохо предсказывают большие и широкие зоны***
- ***Зарегистрировано 18 новых последовательностей в OEIS***
- *Все зоны точно определены,* ***данные доступны для всех желающих***
- ***Создано программное обеспечение,*** *позволяющее проверять гипотезу Чебышёва до 2^{64} ($1.8*10^{19}$)*
- ***Готовится статья*** *для публикации в «Mathematics of Computation»*

Реализация проекта позволила существенно расширить знания о гипотезе Чебышёва и определить степень достоверности теоретических моделей.